דף נוסחאות פיזיקה ג תשפ"ו

קבועים

קבוע פלאנק: $h = 6.626 \times 10^{-34}[\mathrm{J \cdot s}]$

קבוע פלאנק המצומצם: $\hbar = \frac{h}{2\pi}[\mathrm{J \cdot s}]$

קבוע בולצמן: $k_B = 1.38 \times 10^{-23}\left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}\right]$

מהירות האור בריק: $c = 3 \times 10^{8}\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]$

קבוע סטפן-בולצמן: $\sigma = 5.672 \times 10^{-8}\left[\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2 K^4}}\right]$

קבוע וין: $b = 2.9 \times 10^{-3}[\mathrm{m \cdot K}]$

מסת האלקטרון: $m_e = 9.109 \times 10^{-31}[\mathrm{kg}]$

מטען האלקטרון: $e = 1.602 \times 10^{-19}[\mathrm{C}]$

רדיוס בוהר: $a_0 = 0.529\,\mathrm{Å}$

אנרגיית רמת היסוד של המימן: $E_0 = 13.6[\mathrm{eV}]$

מספר אבוגדרו: $N_A = 6.022 \times 10^{\{23\}}[\mathrm{mol}^{-1}]$

קבועים עבור יחידות eV

קבוע פלאנק: $h = 4.136 \times 10^{-15}[\mathrm{eV \cdot s}]$

קבוע פלאנק המצומצם: $\hbar = 6.582 \times 10^{-16}[\mathrm{eV \cdot s}]$

קבוע בולצמן: $k_B = 8.617 \times 10^{-5}\left[\frac{\mathrm{eV}}{\mathrm{K}}\right]$

שיווי משקל תרמודינמי

התפלגות והסתברות:

התפלגות בולצמן: $P(E) = Ae^{-\frac{E}{k_B T}}$

E - אנרגיית המצב, T - טמפרטורה, k_B - קבוע בולצמן, A - קבוע נרמול.

תנאי נרמול: $\int P(E)dE = 1$

ההסתברות הכוללת למצוא את החלקיק באחד מכל המצבים האפשריים שווה ל-1.

תוחלת של משתנה x: $\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} xP(x)dx$

הערך הממוצע (תוחלת) של משתנה, מחושב בעזרת פונקציית ההתפלגות.

ההסתברות למציאת חלקיק בגובה h:

$$P(h) = \frac{mg}{k_B T}\exp\left(-\frac{mgh}{k_B T}\right)$$

גובה ממוצע של חלקיק בעל מסה m: $\langle h \rangle = \frac{k_B T}{mg}$

הגובה הממוצע נמצא ביחס ישר לטמפרטורה T.

עקרון החלוקה השווה וקיבול חום:

האנרגיה הממוצעת של חלקיק חופשי במרחב:

$$\langle E \rangle = \frac{3}{2}k_B T$$

עבור דרגת חופש אחת

האנרגיה הפוטנציאלית הממוצעת של חלקיק:

$$\langle E_p \rangle = \frac{1}{2}m\omega^2\langle x^2 \rangle = \frac{1}{2}k_B T$$

תרומה של דרגת חופש פוטנציאלית אחת (כמו קפיץ בציר אחד).

האנרגיה הקינטית הממוצעת של חלקיק:

$$\langle E_k \rangle = \frac{1}{2}m\langle v^2 \rangle = \frac{1}{2}k_B T$$

תרומה של דרגת חופש קינטית אחת (תנועה בציר אחד).

עקרון החלוקה השווה: כל איבר באנרגיה התלוי במשתנה בריבוע תורם בממוצע $\frac{n}{2}k_B T$

כאשר n הוא מספר דרגות החופש של המערכת. דרגת חופש היא כל דרך בלתי-תלויה שבה החלקיק יכול לאגור אנרגיה. למשל, לחלקיק חופשי יש $n = 3$ דרגות חופש כי הוא יכול לנוע ב-3 צירי המרחב (x, y, z).

הגדרת קיבול חום סגולי: $C_V = \frac{dE}{dT}$

C_V - קיבול החום. השינוי באנרגיה הפנימית E כתוצאה משינוי בטמפרטורה T.

קיבול חום לגז:

חד-אטומי (3 דרגות חופש): $C_V = \frac{3}{2}R$

דו-אטומי (5 דרגות חופש): $C_V = \frac{5}{2}R$

R - קבוע הגזים האוניברסלי, $R = 8.314\left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol \cdot K}}\right]$.

חוק דילון-פטי (קיבול חום למוצק):

$$C_V = 3Nk_B = 3R$$

מוצק מתואר כאוסף קפיצים (6 דרגות חופש לאטום). N - מספר החלקיקים.

מספר מצבי תנודה בתיבה:

אורכי גל ותדרים מותרים בתיבה חד-מימדית (באורך L):

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}, \quad \nu_n = \frac{c}{2L}n$$

n - מספר טבעי המייצג את מספר חצאי אורך הגל בתיבה.

מספר גלים/מצבים מותרים עד תדר ν בתיבה בעלת צלע L (לגל ללא קיטוב):

בחד-מימד (1D): $N_{1D} = n = \frac{2L}{\lambda} = \frac{2L}{c}\nu$

בדו-מימד (2D): $N_{2D} = \frac{1}{4}\pi n^2 = \frac{\pi L^2}{\lambda^2} = \frac{\pi L^2 \nu^2}{c^2}$

בתלת-מימד (3D):

$$N_{3D} = \frac{1}{8}\left(\frac{4}{3}\pi n^3\right) = \frac{4\pi L^3}{3\lambda^3} = \frac{4\pi L^3 \nu^3}{3c^3}$$

עבור גלים אלקטרומגנטיים בתלת-מימד יש 2 קיטובים, ולכן נכפיל פי 2:

$$N_{3D,\ \mathrm{photons}(\nu)} = 2 \times \frac{1}{6}\pi n^3 = \frac{8\pi L^3 \nu^3}{3c^3}$$

מספר מצבי תנודה ליחידת נפח ותדר (הנגזרת של $N_{3D,\ \mathrm{photons}}$ חלקי הנפח $V = L^3$):

$$\frac{dN(\nu)}{V} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}d\nu$$

ν - התדר, c - מהירות האור, V - נפח התיבה. מבטא את צפיפות המצבים האפשריים במרחב התלת-מימדי.

קרינת גוף שחור

נוסחת ריילי-ג'ינס (צפיפות אנרגיה):

$$\rho(\nu) = \frac{8\pi\nu^2 k_B T}{c^3}d\nu$$

$\rho(\nu)$ - האנרגיה ליחידת נפח ויחידת תדר. הנוסחה מבוססת על פיזיקה קלאסית ונכשלת בתדרים גבוהים (הקטסטרופה האולטרה-סגולה).

נוסחת פלאנק לאנרגיה ממוצעת של אוסצילטור (אטום רוטט בחומר הפולט קרינה):

$$\overline{E} = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}$$

מחליפה את הערך הקלאסי $k_B T$. מניחה שהאטומים בחומר קולטים ופולטים אנרגיה רק במנות בדידות (קוונטות) של $h\nu$.

צפיפות האנרגיה של קרינת גוף שחור (נוסחת פלאנק המלאה):

$$\rho(\nu) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}d\nu$$

הנוסחה המדויקת, שמתקבלת מהכפלת צפיפות המצבים באנרגיה הממוצעת $\overline{E}$, ופותרת את הקטסטרופה האולטרה-סגולה.

חוק וין: $\lambda_{\max} = \frac{b}{T}[\mathrm{m}]$

חוק סטפן-בולצמן: $I = \sigma T^4\left[\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2}}\right]$

האפקט הפוטו-אלקטרי

אנרגיה של פוטון: $E_{\mathrm{ph}} = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$

תנע של פוטון: $p_{\mathrm{ph}} = \frac{E_{\mathrm{ph}}}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$

האנרגיה הקינטית של פוטון (B אנרגיית קשר):

$$E_k = E_{\mathrm{ph}} - B$$

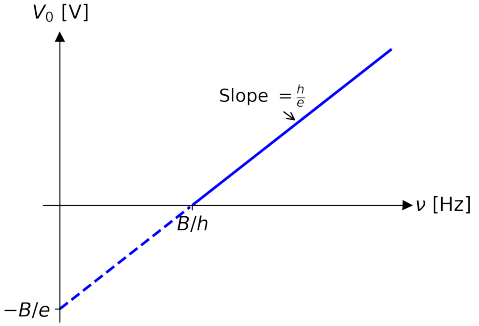
תדירות הסף: $\nu = \frac{B}{h}[\mathrm{Hz}]$

מתח עצירה (כאשר $E_k = U_e$): $V_{\mathrm{stop}} = \frac{E_{k_{\max}}}{e}$

המשך: האפקאט הפוטו-אלקטרי

קשר בין אנרגיה לאורך גל: $E = \frac{1240}{\lambda[\mathrm{nm}]}[\mathrm{eV}]$

גרף מתח העצירה כתלות בתדר: $V_0 = \frac{h\nu}{e} - \frac{B}{e}$



אפקט קומפטון

בכל זווית לבד מאפס ניתן למצוא שני אורכי גל . אורך הגל המקורי λ_0 ועוד אורך גל $\lambda(\theta)$ כאשר $\lambda(\theta) > \lambda_0$

הפרש אורכי הגל:

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\theta)$$

אורך גל קומפטון של האלקטרון:

$$\lambda_C = \frac{h}{m_e c} = 0.00243[\mathrm{nm}]$$

קרינת רנטגן - X (קרינת בלימה)

הסבר: קרינת X נוצרת כאשר אלקטרונים מואצים דרך מפל מתח V ופוגעים באנודה (מטרה מתכתית). כשהם נבלמים בחומר, הם פולטים פוטונים. האנרגיה המקסימלית של פוטון מתקבלת כאשר כל האנרגיה הקינטית של האלקטרון מומרת לפוטון בודד.

האנרגיה הקינטית של האלקטרון המואץ: $E_k = eV$

אנרגיית פוטון מקסימלית ותדר מקסימלי: $eV = h\nu_{\max} = \frac{hc}{\lambda_{\min}}$

אורך גל מינימלי (גבול הספקטרום הרציף):

$\lambda_{\min} = \frac{hc}{eV} = \frac{1.24\times10^4}{V}\,[\text{Å}]$

V הוא מפל המתח, והתוצאה היא באנגסטרם ($10^{-10}m$).

מודל האטום של רתפורד (פיזור חלקיקי α)

מרחק התקרבות מינימלי (בהתנגשות חזיתית, E_k אנרגיה קינטית, $q_N = Ze$):

$r_{\min} = \frac{kq_\alpha q_N}{E_k}$

קשר בין פרמטר פגיעה b לזווית הפיזור θ:

$b = \frac{1}{2} r_{\min}\cot\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{kq_\alpha q_N}{mv_0^2}\cot\left(\frac{\theta}{2}\right)$

$\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}$

חתך פעולה דיפרנציאלי לפיזור רתפורד (הסתברות הפיזור):

$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{16}\left(\frac{kq_\alpha q_N}{E_k}\right)^2 \frac{1}{\sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)}$

מודל בוהר לאטום המימן

קוונטיזציה של התנע הזוויתי:

$L = mvr = n\hbar$

כאשר $n = 1, 2, 3, ...$

רדיוס מסלול n: $r_n = \frac{\hbar^2}{ke^2m}n^2 = a_0 n^2$

רדיוס בוהר: $a_0 = 0.53\,[\text{Å}]$

רמות אנרגיה באטום המימן:

$E_n = -\frac{E_0}{n^2} = -\frac{mk^2e^4}{2\hbar^2 n^2} = \frac{-13.6[\text{eV}]}{n^2}$

כאשר E_0 היא האנרגיה הקינטית במסלול הראשון: $E_0 = \frac{mk^2e^4}{2\hbar^2} = 13.6[\text{eV}]$.

האנרגיה הקינטית באטום המימן:

$E_k = \frac{p^2}{2m} = \frac{(mv)^2}{2m} = \frac{\left(\frac{n\hbar}{r_n}\right)^2}{2m} = \frac{n^2\hbar^2}{2mr_n^2} = \frac{ke^2}{2r_n} = -\frac{E_p}{2} = -E_n$

k הוא קבוע קולון החשמלי: $k = 9\times10^9\left[\frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{C}^2}\right]$.

נוסחת רידברג (פליטת פוטון במעבר מרמה n_i ל-n_f):

$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2}\right)$

קבוע רידברג: $R = 1.097\times10^{-3}\left[\text{Å}^{-1}\right]$. אנרגיית הפוטון היא $E_i - E_f$.

מודל בוהר לאטומים דמויי-מימן (יון עם אלקטרון יחיד)

עבור גרעין עם Z פרוטונים, נחליף את e^2 בנוסחאות ב-Ze^2.

רמות אנרגיה:

$E_n = \frac{-13.6\times Z^2}{n^2}[\text{eV}]$

רדיוס מסלול:

$r_n = \frac{a_0}{Z}n^2$

ניסוי פרנק-הרץ

האצת אלקטרונים דרך שפופרת המכילה גז כספית, כאשר לפני אנודת האיסוף מוצב סריג עם מתח מעכב. האלקטרונים מואצים, וכל עוד האנרגיה הקינטית שלהם נמוכה מפוטנציאל העירור הראשון (4.88V), ההתנגשויות אלסטיות והזרם באנודה עולה. כאשר מתח התאוצה מגיע ל-4.88V בדיוק, מתבצעת התנגשות אינאלסטית: האלקטרונים מוסרים לאטומים את מירב האנרגיה שלהם, ונותרים ללא אנרגיה מספקת להתגבר על המתח המעכב. כתוצאה מכך יש נפילה חדה בזרם הנמדד. תופעה זו חוזרת במחזוריות קבועה עבור כל כפולה שלמה של פוטנציאל העירור (4.88V) מה שמוכיח את קיום רמות האנרגיה הבדידות.

הפרש האנרגיה בין הרמות: $\Delta E = eV_0 = h\nu$

דואליות גל-חלקיק (קשרי דה-ברויי)

$E = \hbar\omega \quad , \quad p = \hbar k$

k בביטוי של התנע הוא **מספר הגל** ($k = \frac{2\pi}{\lambda}$)

עקרון אי-הוודאות של הייזנברג:

אי-ודאות במרחב (מיקום-תנע): $\Delta x\Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$

אי-הוודאות מוגדרת פורמלית כסטיית התקן הסטטיסטית:

$\Delta x = \sigma_x \quad , \quad \Delta p = \sigma_p$

אי-ודאות בזמן (אנרגיה-זמן): $\Delta E\Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$

כאשר $\Delta E = \sigma_E$ ו-Δt הוא הזמן האופייני לשינוי המערכת.

משוואות שרדינגר

הגדרת האנרגיה הכללית:

$E = E_k + U = \frac{p^2}{2m} + U$

הפעלת אופרטור:

הפעלת האופרטור $\hat{A}$ מחלצת את הערך הפיזיקלי a שלו (הגודל המדיד): $\hat{A}\Psi = a\Psi$

אופרטור התנע (מקושר לתנועת החלקיק):

$\hat{p} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \hat{p}\Psi = p\Psi$

אופרטור התנע בריבוע (מקושר לאנרגיה הקינטית):

$\hat{p}^2 = -\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad \Rightarrow \quad \hat{p}^2\Psi = p^2\Psi$

אופרטור ההמילטוניאן (מייצג את האנרגיה הכוללת במערכת):

$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + U(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + U(x) \quad \Rightarrow \quad \hat{H}\Psi = E\Psi$

אופרטור האנרגיה (לפי הזמן):

$\hat{E} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \hat{E}\Psi = E\Psi$

משוואת שרדינגר משוויון אופרטורים:

$\hat{E}\Psi = \hat{H}\Psi$

פתיחת משוואת שרדינגר:

$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + U(x)\right)\Psi$

המשוואה התלויה בזמן:

$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + U\Psi$

המשוואה שאינה תלויה בזמן:

$E\Psi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi(x)}{\partial x^2} + U(x)\Psi(x)$

הכללה לתלת-מימד:

אופרטור הלפלסיאן בקואורדינטות כדוריות:

$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{\sin}\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]$

אופרטור התנע והתנע בריבוע:

$\hat{p} = -i\hbar\nabla \quad , \quad \hat{p}^2 = -\hbar^2\nabla^2$

ההמילטוניאן:

$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U(r)$

המשוואה התלויה בזמן:

$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi + U(r)\Psi$

המשוואה שאינה תלויה:

$\nabla^2\Psi(r) = -\frac{2m}{\hbar^2}(E - U(r))\Psi(r)$

תוחלות, סטטיסטיקה והפרדת משתנים

צפיפות הסתברות (הסיכוי למצוא את החלקיק בנקודה):

Ψ^* הצמוד של- Ψ : $\rho(x) = |\Psi(x)|^2 = \Psi^*\Psi$

הסתברות למצוא את החלקיק בתחום $[a, b]$:

$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b |\Psi(x)|^2\,dx$

תנאי נרמול (החלקיק חייב להימצא במרחב):

$\int_{-\infty}^{\infty}|\Psi|^2\,dx = 1$

תוחלת של משתנה x:

$\langle x\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x\rho(x)dx$

תוחלת של אופרטור $\hat{A}$:

$\langle\hat{A}\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\Psi^*\hat{A}\Psi dx$

שונות (σ^2):

$\Delta A^2 = \sigma_A^2 = \langle\hat{A}^2\rangle - \langle\hat{A}\rangle^2$

סטיית תקן (אי-ודאות של גודל מדיד):

$\Delta A = \sigma_A = \sqrt{\langle\hat{A}^2\rangle - \langle\hat{A}\rangle^2}$

הפרדת משתנים כללית (מרחב וזמן במצבים עומדים):

$\Psi(r,t) = \psi(r)e^{-iE\frac{t}{\hbar}}$

הפרדת משתנים פולרית (בעזרת הרמוניות ספריות Y_{ℓ,m_ℓ}):

$\psi(r,\theta,\varphi) = R_{n,\ell}(r)Y_{\ell,m_\ell}(\theta,\varphi)$

תלויות: $R_{n,\ell}(r)$ הוא החלק הרדיאלי (תלוי רק במרחק r), וההרמוניות הספריות $Y_{\ell,m_\ell}(\theta,\varphi) = \Theta(\theta)\Phi(\varphi)$ הן החלק הזוויתי שמתאר את התפלגות החלקיק במרחב.

תנאי שפה כלליים (תקפים תמיד לפונקציית גל):

התאפסות באינסוף (הכרחי לנרמול):

$\Psi(x) = 0 : \lim_{x\to\pm\infty}$

רציפות הפונקציה : $\Psi(x_0^+) = \Psi(x_0^-)$

רציפות הנגזרת : $\Psi'(x_0^+) = \Psi'(x_0^-)$

חריג: הנגזרת אינה רציפה במקום בו הפוטנציאל אינסופי.

יישומים חד-מימדיים

חלקיק בקופסה (בור פוטנציאל אינסופי באורך L):

תנאי שפה: $\psi(0)=\psi(L)=0$

רמות אנרגיה מותרות: $E_n=\frac{n^2h^2}{8mL^2}=\frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$

פונקציות גל: $\psi_{n(x)}=\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$

$n=1,2,3,...$

פוטנציאל מדרגה:

$U(x)=\begin{cases}0 & :x<0\\ U_0 & :x\geq 0\end{cases}$

כאשר $E>U_0$:

$k_1=\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}\quad,\quad k_2=\frac{\sqrt{2m(E-U_0)}}{\hbar}$

פונקציית גל: $\psi(x)=\begin{cases}Ae^{ik_1x}+Be^{-ik_1x} & :x<0\\ Ce^{ik_2x} & :x\geq 0\end{cases}$

מקדמים: $B=\frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}A\quad,\quad C=\frac{2k_1}{k_1+k_2}A$

כאשר $E<U_0$:

$k_1=\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}\quad,\quad k_2=\frac{\sqrt{2m(U_0-E)}}{\hbar}$

פונקציית גל: $\psi(x)=\begin{cases}Ae^{ik_1x}+Be^{-ik_1x} & :x<0\\ Ce^{-k_2x} & :x\geq 0\end{cases}$

יש גל חוזר מלפני המדרגה, ודעיכה אקספוננציאלית מעבר למדרגה.

מחסום פוטנציאל (מנהור):

$U(x)=\begin{cases}U_0 & :0\leq x\leq d\\ 0 & :\text{אחרת}\end{cases}$

עבור $E<U_0$, מספרי הגל זהים למדרגה. מקדם ההעברה (למחסום רחב $k_2d\gg 1$):

$T=\frac{16E(U_0-E)}{U_0^2}e^{-2k_2d}$

יש הסתברות למעבר חלקיק דרך המחסום

אוסילטור הרמוני קוונטי:

פוטנציאל: $U(x)=\frac{1}{2}m\omega^2x^2$

רמות אנרגיה: $E_n=\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)$

$n=0,1,2,...$ (קיימת "אנרגיית נקודת אפס" $E_0=\frac{1}{2}\hbar\omega$)

פונקציית מצב היסוד (גאוסיאן): $\psi_0(x)=Ae^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$

משוואת שרדינגר לאטום המימן

הפרדת משתנים באטום המימן:

צורה כללית של הפתרון:

$\psi(r,\theta,\varphi)=R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$

המשוואה הרדיאלית $R(r)$:

מגדירים $u(r)=rR(r)$ ומקבלים משוואה התלויה בפוטנציאל האפקטיבי:

$\frac{\partial^2u(r)}{\partial r^2}+\left(-\kappa^2+\frac{2}{a_0r}-\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\right)u(r)=0$

המשוואה האזימוטלית $\Phi(\varphi)$:

$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}+m_\ell^2\Phi=0\quad\Rightarrow\quad\Phi(\varphi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{im_\ell\varphi}$

המשוואה הפולרית $\Theta(\theta)$:

פתרונותיה מוגבלים ע"י המספרים ℓ ו-m_ℓ.

$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right)+\left(\ell(\ell+1)-\frac{m_\ell^2}{\sin^2\theta}\right)\Theta=0$

תנע זוויתי:

אופרטור התנע הזוויתי בריבוע:

$\hat{L}^2=-\hbar^2\left[\frac{1}{\sin}\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]$ גודל

התנע הזוויתי הכולל: $L=\hbar\sqrt{\ell(\ell+1)}$

אופרטור היטל התנע הזוויתי על ציר z: $\hat{L}_z=-i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}$

היטל התנע הזוויתי (הערך העצמי): $L_z=m_\ell\hbar$

מספרים קוונטיים (היררכיית התלויות):

כדי לאפיין מצב באטום נדרשים 4 מספרים קוונטיים. כל מספר מגביל את האפשרויות של זה שאחריו:

1. מספר ראשי n (קובע את רמת האנרגיה):

$n=1,2,3,...$

2. תנע זוויתי אורביטלי ℓ (קובע את גודל התנע וצורת האורביטל):

לכל רמה n, יש בדיוק n צורות אפשריות. הערכים מתחילים מ-0 ונגמרים ב-$n-1$.

$\ell=0,1,2,...,n-1$

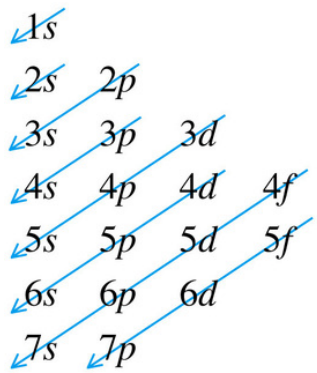
3. מספר קוונטי מגנטי m_ℓ:

$m_\ell=-\ell,...,0,...,+\ell$

4. ספין m_s:

$m_s=+-\frac{1}{2}$ (היטל תנע זוויתי פנימי)

צורת אכלוס האורביטלים באטום



צורת אכלוס האורביטלים: התפלגות ההסתברות של האלקטרון במרחב. תנע זוויתי ℓ קובע את הצורה (s,p,d,f), ומספר m_ℓ קובע את כיוון האורביטל במרחב.

מומנט דיפול מגנטי ואפקט זימן

מומנט דיפול מגנטי (המגנטון של בוהר):

$\mu_B=\frac{e\hbar}{2m_e}$

$\mu_B=9.274\times10^{-24}\left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{T}}\right]=5.788\times10^{-5}\left[\frac{\mathrm{eV}}{\mathrm{T}}\right]$

היטל מומנט הדיפול על ציר ה-z:

$\mu_z=-m_\ell\mu_B$

אפקט זימן (Zeeman Effect):

מכיוון ש-m_ℓ יכול לקבל $2\ell+1$ ערכים שונים, השדה המגנטי **מפצל** את רמת האנרגיה ל-$2\ell+1$ תת-רמות אנרגיה . עבור מצב בו $\ell=0$ (כמו מצב היסוד) אז $m_\ell=0$ והאנרגיה לא משתנה (אין פיצול).

שינוי האנרגיה וסך האנרגיה הכוללת (עם שדה מגנטי B):

$\Delta E=-\mu_zB=m_\ell\mu_BB$

$\Longrightarrow\quad E=E_0+m_\ell\mu_BB$

E - האנרגיה הכוללת החדשה. E_0 - אנרגיית הרמה המקורית ללא השדה. m_ℓ - מספר קוונטי מגנטי . μ_B - מגנטון בוהר. B - עוצמת השדה המגנטי.

כללי ברירה למעברי אנרגיה:

אלקטרון יכול לעבור בין רמות (ולפלוט/לבלוע פוטון) רק אם המעבר מקיים את הכללים הבאים:

$\Delta\ell=\pm1\quad,\quad\Delta m_\ell=0,\pm1$

היסט אורך הגל באפקט זימן:

עקב פיצול הרמות, הפוטון הנפלט משנה את אורך הגל המקורי (λ_0) שלו במידה קטנה. היסט זה מחושב על ידי ($\Delta m_\ell=0,\pm1$):

$\Delta\lambda=\pm\frac{\lambda_0^2\mu_BB}{hc}$

טרנספורמציית גלילאו

מעבר בין מערכות ייחוס (במהירויות נמוכות $v\ll c$):

אם מערכת S' נעה ימינה במהירות קבועה v ביחס למערכת S:

$x'=x-vt\quad,\quad y'=y\quad,\quad z'=z\quad,\quad t'=t$

חיבור מהירויות גליליי:

אם גוף A נע יחסית ל-B במהירות v_{AB}, ו-B נע יחסית ל-C במהירות v_{BC}, אז מהירות A ביחס ל-C היא:

$v_{AC}=v_{AB}+v_{BC}$

הצגה מטריציונית:

$\begin{pmatrix}x\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&v\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\t'\end{pmatrix}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{pmatrix}x'\\t'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-v\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\t\end{pmatrix}$

ניסוי מייקלסון-מורלי (אינטרפרומטר - רוח האתר)

אינטרפרומטר בעל שתי זרועות באורך L, המערכת נעה במהירות v דרך ה"אתר".

זמן תנועה בזרוע הניצבת לכיוון התנועה :

$\left(c\frac{t_\perp}{2}\right)^2=L^2+\left(v\frac{t_\perp}{2}\right)^2\quad\Rightarrow$

$t_\perp=\frac{2L}{\sqrt{c^2-v^2}}\approx\frac{2L}{c}\left(1+\frac{v^2}{2c^2}\right)$

זמן תנועה במסלול המקביל:

$t_\parallel=\frac{L}{c-v}+\frac{L}{c+v}=\frac{2Lc}{c^2-v^2}\approx\frac{2L}{c}\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)$

הפרש זמנים ודרכים אופטיות:

$\Delta t=t_\parallel-t_\perp\approx\frac{Lv^2}{c^3}\quad\Rightarrow\quad\Delta x=c\Delta t\approx\frac{Lv^2}{c^2}$

היסט הפרינג'ים בסיבוב:

כאשר מסובבים את האינטרפרומטר ב-90°, התפקידים מתחלפים וההפרש מוכפל. מספר הפרינג'ים שיזוזו:

$\Delta m=\frac{2\Delta x}{\lambda}=\frac{2Lv^2}{\lambda c^2}$

מוחלטות ויחסיות (סימולטניות)

1. בו-זמניות (סימולטניות):

עבור שני אירועים המתרחשים **באותו זמן** אך במיקום שונה במערכת S ($\Delta t=0,\Delta x\neq0$), הפרש הזמנים במערכת S' הנעה ביחס אליה:

$\Delta t'=-\gamma\frac{v}{c^2}\Delta x$

2. בו-מקומיות:

עבור שני אירועים המתרחשים **באותו מקום** במערכת S ($\Delta x=0$), המרחק והזמן במערכת S':

$\Delta x'=-\gamma v\Delta t\quad,\quad\Delta t'=\gamma\Delta t$

3. אירוע מוחלט:

עבור שני אירועים המתרחשים **באותו זמן ובאותו מקום** במערכת S ($\Delta x=0,\Delta t=0$):

$\Delta t'=0\quad,\quad\Delta x'=0$

התארכות הזמן (זמן עצמי)

זמן עצמי (Δt_0):

הזמן הנמדד בשעון בודד הנמצא **במנוחה** ביחס לאירועים (כלומר, עבורו האירועים מתרחשים באותו מקום $\Delta x'=0$).

התארכות הזמן:

צופה אחר, שרואה את השעון העצמי נע במהירות v, ימדוד זמן ארוך יותר בין האירועים:

$\Delta t=\gamma\Delta t_0\quad,\quad\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}>1$

γ הוא פקטור לורנץ.

(הזמן במערכת המעבדה תמיד ארוך יותר מהזמן העצמי).

פרדוקס התאומים: במקרה של פרידה ופגישה מחדש, הצופה שהאיץ או שינה כיוון (החליף מערכת ייחוס) הוא זה שימדוד פחות זמן (יהיה צעיר יותר).

התקצרות האורך (אורך עצמי)

אורך עצמי (L_0):

האורך של עצם הנמדד במערכת ייחוס שבה הוא **במנוחה**. כדי למדוד אורך של עצם נע, חובה למדוד את שני הקצוות שלו **בו-זמנית** ($\Delta t = 0$).

התקצרות האורך:

צופה שרואה את העצם נע במהירות v ביחס אליו, ימדוד אורך קצר יותר:

$$L = \frac{L_0}{\gamma}$$

התקצרות במימד מקביל לעומת ניצב :

$$L_\parallel = \frac{L_{0_\parallel}}{\gamma} \quad , \quad L_\perp = L_{0\perp}$$
$$L\cos\theta = \frac{L_0\cos\theta'}{\gamma} \quad , \quad L\sin\theta = L_0\sin\theta'$$

(ההתקצרות קורית **רק** לאורך כיוון התנועה המקביל למהירות. מימדים ניצבים לתנועה אינם מתקצרים).

אינוריאנט לורנץ :

$$\Delta t \cdot L = \Delta t_0 \cdot L_0$$

טרנספורמציית לורנץ

S' נעה במהירות קבועה v בכיוון $+x$ ביחס ל-S.

נסמן, פקטור לורנץ: $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$, $\beta = \frac{v}{c}$.

הצגה מטריציונית כללית

הישירה מ-S ל-S': $\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -v \\ -\frac{v}{c^2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}$

ההפוכה מ-S' ל-S: $\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & v \\ \frac{v}{c^2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix}$

פתיחה ישירה: $x' = \gamma(x - vt) \quad , \quad t' = \gamma(t - \frac{v}{c^2}x)$

מטריצה מנורמלת:

יחידות זהות של אורך לשני הצירים

הישירה מ-S ל-S': $\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$

ההפוכה מ-S' ל-S: $\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix}$

מרחב מינקובסקי ב-4 ממדים (1+3):

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

חיבור מהירויות יחסותיות נובע ישירות מטרנספורמציית לורנץ

חלקיק נע במערכת S', הנעה במהירות v ביחס ל-S (בכיוון ציר x). מהירויות החלקיק הן u במערכת S ו-u' במערכת S':

בציר x (במקביל לכיוון התנועה):

$$u_x = \frac{u'_x+v}{1+\frac{u'_x v}{c^2}} \quad , \quad u'_x = \frac{u_x-v}{1-\frac{u_x v}{c^2}} \quad , \quad v = \frac{u_x-u'_x}{1-\frac{u_x u'_x}{c^2}}$$

בצירים y, z (בניצב לכיוון התנועה):

$$u_y = \frac{u'_y}{\gamma\left(1+\frac{u'_x v}{c^2}\right)} \quad , \quad u'_y = \frac{u_y}{\gamma\left(1-\frac{u_x v}{c^2}\right)}$$
$$u_z = \frac{u'_z}{\gamma\left(1+\frac{u'_x v}{c^2}\right)} \quad , \quad u'_z = \frac{u_z}{\gamma\left(1-\frac{u_x v}{c^2}\right)}$$

כאשר $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

נוסחאות עבור יחידות c להציב את המהירויות ביחידות של c:

$$u_x = \frac{u'_x+v}{1+u'_x v} \quad , \quad u'_x = \frac{u_x-v}{1-u_x v} \quad , \quad v = \frac{u_x-u'_x}{1-u_x u'_x}$$

$$u_y = \frac{u'_y}{\gamma(1+u'_x v)} \quad , \quad u_z = \frac{u'_z}{\gamma(1+u'_x v)}$$

אינטרוול מרחב-זמן - מרחב מינקובסקי

גודל אינוריאנטי. נשמר זהה בכל מערכות הייחוס

האינטרוול: $I = I' = (\Delta s)^2$.

כאשר Δs הוא המרחק האבסולוטי בין שני אירועים במרחב-זמן.

$$I = (\Delta s)^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2$$

עבור אינטרוול דמוי-זמן ($I > 0$), הקשר לזמן העצמי $\Delta\tau$ הוא: $I = \Delta s^2 = (c\Delta\tau)^2$

סוגי אינטרוולים:

1. **דמוי-זמן - TL ($I > 0$):** $(c\Delta t)^2 > (\Delta x)^2 \Rightarrow v < c$

   ההפרש בעיקר בזמן. חלקיק יכול לעבור. **יש קשר סיבתי**.

   סדר הזמנים נשמר בכל מערכת

   קיימת מערכת בה $\Delta x = 0$ ההתרחשות באותו מקום. $I = (c\Delta\tau)^2$.

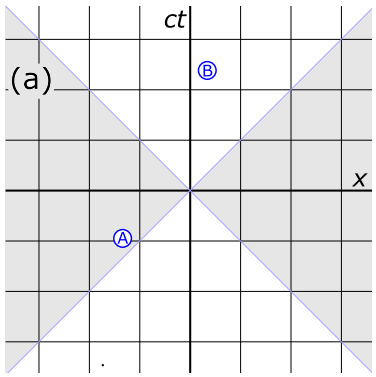
2. **דמוי-מרחב - SL ($I < 0$):** $(c\Delta t)^2 < (\Delta x)^2 \Rightarrow v > c$

   ההפרש בעיקר במרחב. **אין קשר סיבתי**.

   סדר הזמנים **יכול להתהפך** במערכות שונות קיימת מערכת בה $\Delta t = 0$ (בו-זמנית).

3. **דמוי-אור - LL ($I = 0$):** $(c\Delta t)^2 = (\Delta x)^2 \Rightarrow v = c$

   על המגבלה. רק קרן אור עוברת. ביחס לאור אין כלל זמן והמרחב מתכווץ לאפס.



דיאגרמת מרחב-זמן (מינקובסקי): ציר ה-x מייצג מרחב וציר ה-ct מייצג זמן. הקווים האלכסוניים ($v = c$) יוצרים את "קונוס האור" (האיזור הלבן) המפריד בין אירועים דמויי-זמן (בתוך הקונוס, היכן שקשר סיבתי אפשרי) לבין אירועים דמויי-מרחב (מחוץ לקונוס, נטולי קשר סיבתי).

דינמיקה יחסותית

בכל הנוסחאות שלהלן: m מסת המנוחה

תנע יחסותי: $\vec{p} = \gamma m\vec{v}$

אנרגיית מנוחה: $E_0 = mc^2$

אנרגיה קינטית: $E_k = mc^2(\gamma - 1)$

אנרגיה כוללת: $E = E_0 + E_k = \gamma mc^2$

קירוב למהירויות נמוכות ($v \ll c$) או תגובה מהתנגשות בחפץ מאסיבי (כגון פוטון באטום):

התנע מקורב קלאסית $p \approx mv$, והאנרגיה הקינטית הנרכשת כמעט אפסית $E_k \approx \frac{p^2}{2m} \approx 0$.

קשר תנע-אנרגיה (המשוואה הכללית):

קושרת אנרגיה לתנע ללא תלות ישירה במהירות, ותקפה גם לחלקיקים חסרי מסה (שם $m = 0$). ערך המשוואה אינוריאנטי ונשמר בכל מערכת ייחוס:

$$E^2 = \left(mc^2\right)^2 + (pc)^2$$

גם בדינמיקה יחסותית נשמרים חוקי השימור במערכות סגורות:

שימור אנרגיה: $\sum E_{\text{before}} = \sum E_{\text{after}}$

שימור תנע: $\sum \vec{p}_{\text{before}} = \sum \vec{p}_{\text{after}}$

4-וקטור תנע-אנרגיה (p^μ):

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z\right)$$

וקטור 4-ממדי (רכיב זמן ו-3 מרחב). מכפלתו בעצמו שווה לאינוריאנט מסת המנוחה: $p_\mu p^\mu = \left(\frac{E}{c}\right)^2 - p^2 = (mc)^2$.

חלקיקים חסרי מסה ($m = 0$), למשל פוטון הנע ב-c):

$$E = pc$$

כאשר תנע החלקיק חסר המסה הוא: $p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$

קשרים שימושיים לפתרון תרגילים:

$$\gamma = \frac{E}{mc^2} \quad , \quad \beta = \frac{v}{c} = \frac{pc}{E} \quad , \quad v = \frac{pc^2}{E}$$

מסת מערכת (מתוך אינוריאנט שימור תנע-אנרגיה):

$$\left(M_{\text{sys}}c^2\right)^2 = (\Sigma E)^2 - (\Sigma pc)^2$$

(בכל התנגשות או דעיכה, חיבור האנרגיות וחיבור התנעים הווקטורי של כל החלקיקים מאפשר למצוא את המסה של המערכת, גודל שנשמר קבוע).

אלקטרומגנטיות יחסותית

התמרת שדות (מ-S למערכת S' הנעה במהירות $\vec{v}$):

$$\vec{E}'_\parallel = \vec{E}_\parallel \quad , \quad \vec{E}'_\perp = \gamma\left(\vec{E}_\perp + \vec{v}\times\vec{B}\right)$$
$$\vec{B}'_\parallel = \vec{B}_\parallel \quad , \quad \vec{B}'_\perp = \gamma\left(\vec{B}_\perp - \frac{1}{c^2}\vec{v}\times\vec{E}\right)$$

הקשר: שדה מגנטי במערכת אחת, ייראה גם כשדה חשמלי במערכת אחרת ולהפך.

שדה של קבל לוחות (כיווץ אורך):

הקשר: קבל נע. במקביל ללוחות (השדה ניצב לתנועה) צפיפות המטען עולה ולכן $E_\perp = \gamma E_{0\perp}$. בניצב ללוחות השדה אינו משתנה $E_\parallel = E_{0\parallel}$.

שדה חשמלי ומגנטי של מטען נקודתי נע:

הקשר: מטען Q נע במהירות v. השדה מתכווץ בכיוון התנועה ומתחזק בניצב אליה.

$$\vec{E} = \frac{kQ}{r^2}\frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}}\hat{r}$$

(בזווית $\theta = 90^\circ$ השדה גדל פי γ. בזווית $\theta = 0^\circ$ קטן פי γ^2).

השדה המגנטי שנוצר מהמטען הנע: $\vec{B} = \frac{1}{c^2}\left(\vec{v}\times\vec{E}\right)$

התמרת כוח כללית (ממערכת מנוחה למערכת נעה):

הקשר: כוח F' הפועל במערכת המנוחה של החלקיק (S'), ייראה במערכת המעבדה (S) כ:

$$F_\parallel = F'_\parallel \quad , \quad F_\perp = \frac{F'_\perp}{\gamma}$$

תיל נושא זרם / מטענים הנעים במקביל (מקור הכוח המגנטי):

הקשר: במערכת המעבדה, תיל ניטרלי נושא זרם מפעיל כוח מגנטי F_B על מטען נע. במערכת המנוחה של המטען, התיל הופך לטען בצפיפות $\lambda_{\text{tot}} = \gamma\beta^2\lambda_0$ (בגלל התקצרות אורך יחסותית של יוני התיל/האלקטרונים) ומפעיל כוח חשמלי טהור F'_E.

$F_B = \frac{F'_E}{\gamma} \quad \Rightarrow \quad F = qv\frac{\mu_0 I}{2\pi r} = qvB$

עבור שני מטענים זהים הנעים יחד במקביל במהירות v,
הכוח המגנטי מנוגד לחשמלי:

$F_B = \beta^2 F_E \quad \Rightarrow \quad F_{\text{total}} = F_E - F_B = \frac{F_E}{\gamma^2} = \frac{F'_E}{\gamma}$

חוקים בסיסיים

הקרנה: $E = \frac{\Phi}{A}\left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2}\right]$

שטף קרינה (של מקור קורן): $\Phi = IA_{\text{source}}[\text{W}]$

I הפליטה הקרינתית של המקור, כמו גוף שחור (מקביל ל M - פליטה קרינתית מרדיומטריה)

עבור אנרגייה תמיד מתקיים (כאשר ההספק קבוע):
$E = P\Delta t$

ביטוי כללי להספק: $P = \frac{dE}{dt}[\text{W}]$

נספח מתמטי: טריגונומטריה

זהויות טריגונומטריות:

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad , \quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad , \quad 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2} x$

$\sin(x + -y) = \sin x \cos y + -\cos x \sin y \quad , \quad \cos(x + -y) = \cos x \cos y - +\sin x \sin y$

$\sin(2x) = 2\sin x \cos x \quad , \quad \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$

משפט הסינוסים והקוסינוסים:

$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} \quad , \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

נספח פיזיקלי: קלאסית וחשמל בסיסי

קינמטיקה:

$v = v_0 + at \quad , \quad x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \quad , \quad v^2 = v_0^2 + 2a\Delta x$

תנועה מעגלית:

$a_R = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R \quad , \quad v = \omega R \quad , \quad T = \frac{2\pi}{\omega} \quad , \quad \sum \vec{F}_R = m\frac{v^2}{R}\hat{r}$

חוקי ניוטון:

$\sum \vec{F} = m\vec{a}$

$\sum F = \frac{dp}{dt}$

התנגשויות ושימור תנע:

$\sum \vec{p}_i = \sum \vec{p}_f \quad , \quad \vec{p} = m\vec{v}$

$\sum E_{k_i} = \sum E_{k_f}$

אלסטית לחלוטין: תנע נשמר + אנרגיה קינטית נשמרת

פלסטית לחלוטין: תנע נשמר + הגופים נצמדים עם מהירות משותפת (אין שימור אנרגיה)

$\vec{u} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}$

אנרגיה:

$E_k = \frac{1}{2}mv^2 \quad , \quad E_i = E_f \quad , \quad W_{\text{nc}} = \Delta E$

כבידה: $\vec{F}_g = \frac{Gm_1m_2}{r^2}\hat{r} \quad , \quad U_g = -\frac{Gm_1m_2}{r}$

כוח חשמלי: $\vec{F}_e = \frac{kq_1q_2}{r^2}\hat{r}$

כוח מגנטי וכוח לורנץ:

$\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B} \quad , \quad \vec{F}_B = I\vec{L} \times \vec{B} \quad , \quad R = \frac{mv}{qB}$

שדה ופוטנציאל: $\vec{F} = q\vec{E} \quad , \quad U = qV$

ממטען נקודתי: $E = \frac{kq}{r^2} \quad , \quad V = \frac{kq}{r}$

קשרים דיפרנציאליים: $\vec{E} = -\nabla V \quad , \quad \vec{F} = -\nabla U$

נספח מתמטי: אלמנטים דיפרנציאליים

עבור אינטגרצייה על ספירה מלאה: $\varphi \in [0, 2\pi], \theta \in [0, \pi]$

מערכת	$d\vec{l}$	$d\vec{A}$	dV
קרטזית (x, y, z)	$dx\hat{x} + dy\hat{y} + dz\hat{z}$	$dxdy\hat{z}$	$dxdydz$
גלילית (ρ, φ, z)	$d\rho\hat{\rho} + \rho d\varphi\hat{\varphi} + dz\hat{z}$	$\rho d\rho d\varphi\hat{z}$	$\rho d\rho d\varphi dz$
כדורית (r, θ, φ)	$dr\hat{r} + rd\theta\hat{\theta} + r\sin\theta d\varphi\hat{\varphi}$	$r^2\sin\theta d\theta d\varphi\hat{r}$	$r^2\sin\theta drd\theta d\varphi$

נספח: משוואות מקסוול

חוק	צורה דיפרנציאלית	צורה אינטגרלית
גאוס לחשמל	$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$	$\int \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{in}}}{\varepsilon_0}$
גאוס למגנטיות	$\nabla \cdot \vec{B} = 0$	$\int \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$
פראדיי	$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\int \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$
אמפר-מקסוול	$\nabla \times \vec{B} = \mu_0\vec{J} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$	$\int \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{in}} + \mu_0\varepsilon_0\frac{d\Phi_E}{dt}$